PART2　媒介変数と軌跡

例題

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点Ｐの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心Ｐの軌跡を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心Pの軌跡を求めよ。

第7講　PART2 確認問題

1　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-6ax-6a$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

放物線　$y=$ [ア] x^2- [イ] x

2　m が実数のとき，

円 $x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$ の中心Pの軌跡を求める。

$x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$ を変形すると

$(x-$ [ウ] $)^2+(y-$ [エ] $)^2=$ [オ]

となり

[オ] >0

であるから，この式は確かに円を表す。

よって，中心Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=$ [カ]，$y=$ [キ]

これより，中心Pの軌跡は

放物線　$y=\dfrac{[ク]}{[ケコ]}x^2$

[[ウ] ～ [キ] の選択肢]

① $2m$　② $9m$　③ $\dfrac{9}{2}m$

④ m^2　⑤ m^4　⑥ m^2+4

⑦ $\dfrac{m^2}{4}+1$　⑧ $m^4-\dfrac{5}{4}m^2-1$

⑨ m^4+20m^2-1

PART2　媒介変数と軌跡

例題

(1)　実数 a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-2ax+1$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ の中心 P の軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

よって，頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=a \cdots\cdots ①,\quad y=-a^2+1 \cdots\cdots ②$$

①，②より a を消去して　$y=-x^2+1$

したがって，求める点 P の軌跡は　放物線 $y=-x^2+1$

(2)　$x^2+y^2+2(m+2)x-6my=0$ より $(x+m+2)^2+(y-3m)^2=10m^2+4m+4 \cdots\cdots (*)$

$10m^2+4m+4=10\left(m+\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{18}{5}>0$ より，(＊)は確かに円を表す。

よって，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-m-2 \cdots\cdots ①,\quad y=3m \cdots\cdots ②$$

①より　$m=-x-2$

これを②に代入して

$$y=3(-x-2)=-3x-6$$

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $y=-3x-6$

練習

(1)　a が実数のとき，放物線 $y=x^2-4ax-8a$ の頂点Pの軌跡を求めよ。

(2)　m が実数のとき，円 $x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ の中心Pの軌跡を求めよ。

(1)　$y=x^2-4ax-8a=(x-2a)^2-4a^2-8a$

よって，頂点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=2a \cdots\cdots ①,\quad y=-4a^2-8a \cdots\cdots ②$$

①より　$a=\dfrac{x}{2}$

これを②に代入して

$$y=-4\left(\frac{x}{2}\right)^2-8\cdot\frac{x}{2}=-x^2-4x$$

したがって，求める点Pの軌跡は　放物線 $y=-x^2-4x$

(2)　$x^2+y^2+3mx-2m^2y+m^4+2m^2-1=0$ より $\left(x+\dfrac{3}{2}m\right)^2+(y-m^2)^2=\dfrac{m^2}{4}+1 \cdots\cdots (*)$

$\dfrac{m^2}{4}+1>0$ より，$(*)$は確かに円を表す。

よって，中心Pの座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=-\frac{3}{2}m \cdots\cdots ①,\quad y=m^2 \cdots\cdots ②$$

①より　$m=-\dfrac{2}{3}x$

これを②に代入して　$y=\left(-\dfrac{2}{3}x\right)^2=\dfrac{4}{9}x^2$

したがって，求める点Pの軌跡は　放物線 $y=\dfrac{4}{9}x^2$

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：－，イ：2

[解説]

$y=x^2-6ax-6a=(x-3a)^2-9a^2-6a$

よって，頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=3a$　……①　[A]

$y=-9a^2-6a$　……②

①より　$a=\dfrac{x}{3}$

これを②に代入して

$$y=-9\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2-6\cdot\frac{x}{3}=-x^2-2x$$

したがって，求める点 P の軌跡は

放物線 $y=-x^2-2x$

[A]　媒介変数表示と軌跡
点 $P(x,\ y)$ の $x,\ y$ それぞれが変数 a（媒介変数）などで表されるとき，a を消去して $x,\ y$ の関係式を導くことで，点 P の軌跡を求めることができる。

2 **[正解]** **ウ**：③，**エ**：④，**オ**：⑦，**カ**：③，**キ**：④，**ク**：4，
ケコ：81

[解説]

$x^2+y^2-9mx-2m^2y+m^4+20m^2-1=0$　より

$$\left(x^2-9mx+\frac{81}{4}m^2\right)-\frac{81}{4}m^2+\left(y^2-2m^2y+m^4\right)=-20m^2+1$$

$$\left(x-\frac{9}{2}\boldsymbol{m}\right)^2+\left(y-\boldsymbol{m}^2\right)^2=\boldsymbol{\frac{m^2}{4}+1}$$

$\dfrac{m^2}{4}+1>0$ であるから，この式は確かに円を表す。

よって，中心 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=\dfrac{9}{2}\boldsymbol{m}$　……①　[B]

$y=\boldsymbol{m}^2$　……②

①より　$m=\dfrac{2}{9}x$

これを②に代入して

$$y=\left(\frac{2}{9}x\right)^2=\frac{4}{81}x^2$$

したがって，求める点 P の軌跡は

放物線 $\boldsymbol{y=\frac{4}{81}x^2}$

[B]　媒介変数表示と軌跡
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x，y それぞれが変数 m（媒介変数）などで表されるとき，m を消去して x, y の関係式を導くことで，点 P の軌跡を求めることができる。